DUREE : 4 HEURES - COEFFICIENT : 4

Le soin apporté à la rédaction sera un élément important d'appréciation.

PREMIERE PARTIE.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme défini par : $E_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$

1°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
(i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $E_{2n}(x) > 0$.
(ii) Il existe un unique réel négatif a_n tel que $E_{2n+1}(a_n) = 0$, avec en outre $E_{2n+1}(x) < 0$ pour $x \in]-\infty, a_n[$ et $E_{2n+1}(x) > 0$ pour $x \in]a_n, +\infty[$

2°) Préciser a_0. et donner une valeur approchée de a_1 et de a_2 à 10^{-1} près.

3°) **a)** Montrer que la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > -(2n+3)$$

Pour celà, on pourra remarquer que l'on peut écrire :

$$E_{2n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{2k}}{(2k+1)!}(X + 2k + 1).$$

b) Pour tout réel A, montrer que : $\lim_{n \to +\infty} E_{2n+1}(A) > 0$.

En déduire que : $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$.

4°) **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence et l'unicité d'un réel strictement positif z_n tel que : $e^{-z_n} E_n(z_n) = \frac{1}{2}$.

b) Montrer que la suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, et $\lim_{n \to +\infty} z_n = +\infty$.

DEUXIEME PARTIE.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note φ_n l'application de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ \varphi_n(x) = x^n e^{-x}$$

1°) Donner sur un même dessin, avec trois couleurs différentes, les représentations graphiques de φ_0, φ_1 et φ_2.

2°) **a)** Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, l'existence et l'unicité de deux réels u_n et v_n tels que : $1 < u_n < e < n < v_n$ et $\varphi_n(u_n) = \varphi_n(v_n) = 1$.

b) Etudier la monotonie des suites $(u_k)_{k\geq 3}$ et $(v_k)_{k\geq 3}$, et déterminer : $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ainsi que $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

3°) a) Pour $x \in]0,1[$, soit $\theta(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x$. Justifier que $\theta(x) > 0$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in]0,n[$ $\varphi_n(n+x) > \varphi_n(n-x)$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\int_0^n \varphi_n(t)\,dt < \int_n^{2n} \varphi_n(t)\,dt$

4°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :
$$\int_0^x \varphi_n(t)\,dt = n!\,(1 - e^{-x}\,E_n(x))$$

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence et la valeur de $I_n = \int_0^{+\infty} \varphi_n(t)\,dt$.

5°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $e^{-n}\,E_n(n) > \frac{1}{2}$

b) Montrer que les deux suites $(e^{-n}\,E_n(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(e^{-n}\,E_{n-1}(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont monotones et convergent vers un certain réel L de $[\frac{1}{2}, 1]$ (que l'on ne cherchera pas à calculer).

c) Ecrire un algorithme permettant d'évaluer L à 10^{-2} près. Utiliser une calculette afin de donner cette approximation.

6°) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $M_n = \mathrm{Sup}\left\{\frac{\varphi_n(t)}{n!} / t \in \mathbb{R}_+\right\}$.

b) Donner un équivalent simple de $\ln\left(\frac{M_{n-1}}{M_n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$, puis préciser la nature de la série de terme général $\ln\left(\frac{M_{n-1}}{M_n}\right)$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} M_n$

c) Préciser aussi $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{I_n}{n!}\right)$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

TROISIEME PARTIE.

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $[0,+\infty[$ et définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$. Elles sont supposées mutuellement indépendantes, et suivant la même loi exponentielle de paramètre 1, admettant comme densité φ définie par :
$$\forall\, t \in]-\infty,0[\,,\ \varphi(t) = 0 \quad ; \quad \forall\, t \in [0,+\infty[\,,\ \varphi(t) = e^{-t}.$$

a) Déterminer une densité de la variable : $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ (on pourra raisonner par récurrence sur n).

b) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

c) Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

d) Soient deux réels a et b tels que $a < b$. Montrer que si l'entier n est suffisamment grand et vérifie $n + a\sqrt{n} > 0$, on peut écrire :

$$\mathbf{P}(a \leq T_n \leq b) = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} \int_a^b \varphi_{n-1}(n + y\sqrt{n})\, dy$$

e) En admettent l'équivalence : $k! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2.\pi.k}\,.\,(\frac{k}{e})^k$ (formule de De Moivre- Stirling), déterminer pour tout réel y fixé : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}\ \varphi_{n-1}(n + y\sqrt{n})\right)$.

Comment interprétez-vous ce résultat ?

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, et définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$, supposées mutuellement indépendantes, et suivant la même loi de Poisson de paramètre 1. C'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, avec $k \leq n$, on a :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(Y_k = i) = \frac{e^{-1}}{i!}$$

a) Déterminer la loi de la variable : $\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, ainsi que son espérance et sa variance.

b) Montrer que : $\mathbf{P}(\Sigma_n < n) = \mathbf{P}(S_n > n)$

c) Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $U_n = \frac{\Sigma_n - n}{\sqrt{n}}$.

d) Soit a un réel fixé. Grâce à un résultat du cours, donnez : $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(U_n \leq a)$.

e) En déduire : $\lim_{n\to+\infty}(e^{-n}\, E_n(n))$ ainsi que : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n!}\int_0^n \varphi_n(t)\, dt\right)$

3°) **a)** Préciser la valeur de L de II.5°.b.

b) On considère à nouveau la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de I.4°.

Montrer que la suite : $(x_n - n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.